ENSAYOS SOBRE EUCLIDES
VOLUMEN I

LA GEOMETRÍA DE LA CONGRUENCIA

ENSAYOS SOBRE EUCLIDES

Volumen I

LA GEOMETRÍA DE LA CONGRUENCIA

Carlos Álvarez J.

Universidad Nacional Autónoma de México

México, 2021

Catalogación en la publicación UNAM. Dirección General de Bibliotecas
y Servicios Digitales de Información
Nombres: Álvarez Jiménez, Carlos, autor.
Título: Ensayos sobre Euclides / Carlos Álvarez J.
Descripción: Primera edición. | Ciudad de México : Universidad Nacional Autónoma de México, Secretaría de Desarrollo Institucional, 2021- . | Contenido: Volumen I. La geometría de la congruencia.
Identificadores: LIBRUNAM 2118381 | ISBN 9786073053938 (obra completa) | ISBN 9786073053945 (v. I)
Temas: Euclides, de Alejandría. | Geometría. | Matemáticas griegas.
Clasificación: LCC QA29.E78.A58 2021 | DDC 510.92—dc23

Los contenidos de esta obra fueron analizados con software de similitudes por lo que cumplen plenamente con los estándares científicos de integridad académica, de igual manera fue sometido a un riguroso proceso de dictaminación doble ciego con un resultado positivo, el cual garantiza la calidad académica del libro, que fue aprobado por el Comité Editorial de la Secretaría de Desarrollo Institucional.

Ensayos sobre Euclides. Vol. I *La geometría de la congruencia*

Primera edición: 30 de diciembre de 2021

Ciudad Universitaria, Alcaldía de Coyoacán, C.P. 04510
Secretaría de Desarrollo Institucional
Ciudad Universitaria, 8o. Piso de la Torre de Rectoría
Alcaldía de Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México

ISBN del volumen 978-607-30-5394-5
ISBN de la obra completa 978-607-30-5393-8

Formación: Rosa Alicia Castillo Jaén / S y G editores
Diseño de portada y revisión: Arturo Sánchez y Gándara

Impreso y hecho en México / Made and printed in Mexico

Créditos institucionales

Esta obra ha sido publicada con el apoyo de la Secretaría de Desarrollo Institucional y el Seminario Universitario de Historia, Filosofía y Estudios de las Ciencias y la Medicina (SUHFECIM) de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Investigación realizada en el marco de los proyectos PAPIIT IN405620 y ECOS M18MH01: Matematización y Cambio Conceptual.

Créditos de figuras

Fig. 1 (p. 46). *Ms. Arch. Selden* **B.13** Folio 007*v* con las definiciones del Libro II. Copia Manuscrita de la traducción latina de Euclides atribuida originalmente a Adelardo de Bath que corresponde a la versión Adelardo III (atribuida hoy a Jean de Tinemue). Cortesía de la Bodleian Library, Oxford University. / Online record: https://digital.bodleian.ox.ac.uk/objects/e7c9cf2c-0440-49d1-9eb5-7d50e682a3a1 / Terms of use: CC-BY-NC 4.0.

Fig. 2 (p. 51) Diagrama de la proposición P.II-5. Cortesía del Penn Museum, *Papiro Oxyrhinicus* XXIX.

Fig. 3 (p. 53) *Ms. Bodleiano D'Orville* X (**B**) (301) Folios 35*v* y 36*r* con las proposiciones P.II-5 y P.II-6. Cortesía de la Bodleian Library, Oxford University./ Online record: https://digital.bodleian.ox.ac.uk/objects/d4a23501-0b98-4aff-acd6-fe06fe9b62e3/surfaces/75feaa88-1c2d-40da-adba-975f49d74e56./ Terms of use: CC-BY-NC 4.0.

A mi Lady

A cadifersa

Desde mis ojos insomnes
mi muerte me está acechando,
me acecha, sí, me enamora
con su ojo lánguido.
¡Anda, putilla del rubor helado,
anda, vámonos al diablo!
(fragmento)

Muerte si fin
José Gorostiza

…y cuando al fin llegó a la puerta
de aquel hostal que se encontraba
a la orilla del camino,
no pudo evitar recordar
aquella fría mañana de otoño
diecinueve años atrás,
cuando cruzó esa misma puerta
sólo para preguntar
si ese era el camino que conducía
a las cuevas de Altamira...
(fragmento)

Novela Anónima

Contenido

Introducción

Este libro tiene como propósito principal trazar la historia de los *Elementos* de Euclides, una obra que con justicia puede ser considerada la más importante que se ha escrito en la geometría y probablemente en toda la matemática. Debemos aclarar ahora, aunque eso tendrá que hacerse a lo largo de toda esta obra, qué entendemos por la historia de un texto y la historia de una disciplina. Si una tarea de la historia de las matemáticas es la de contribuir al esclarecimiento de su origen, lo es también el esclarecimiento de la naturaleza misma de los conceptos matemáticos, preguntarse por el origen de una teoría matemática es preguntarse por el origen de sus conceptos, y esta pregunta conlleva otra relacionada con los conceptos mismos. Preguntar por la historia o por el origen de la geometría es al mismo tiempo preguntar qué es la geometría misma. Creemos que la idea central en torno de estas preguntas está a su vez vinculada con la idea que asegura que, en estricto sentido, las matemáticas no tienen historia, puesto que no existe en ellas un *pasado* y tampoco existe una teoría que podamos o debamos considerar como caduca o perimida. No parece posible hablar de una teoría matemática cultivada en la antigüedad que hoy consideremos como errónea, una teoría que pudo haber respondido a viejas ideas, viejos modelos o visiones del mundo, las que, al tornarse caducas, han hecho lo mismo con esas teorías matemáticas en cuyo seno surgieron.

Si bien toda teoría matemática es actual, los métodos o procedimientos para presentarla e incorporarla a un marco que pudiésemos considerar *moderno* han evolucionado, dando así muestra de una cualidad *proteica* de las teorías matemáticas, la cual no sólo se presenta como un sello distintivo, ya que puede también servir como guía para comprender el mecanismo de su propia historia, de esa historia cuyo sentido debemos dirimir, si es que se trata de una historia. Al aclarar el papel de la geometría frente a su historia, puesto que nada en ella es realmente pasado, podemos decir que ella vive plenamente en su historia; si toda historia exige un cierto distanciamiento, condición que se asume como necesaria para poder elaborar un juicio acerca de cuánto se debe a la historia, nos encontramos que dicho distanciamiento no es tal en la geometría, ella vive a través de su historia y ella es su propia historia.

Podemos subrayar algunos mecanismos que dan cuenta del doble carácter de esta historia, de los elementos que constituyen su temporalidad y, al mismo tiempo, su expansión y difusión. Esta historia que se despliega en su propio seno y que se revela en su estructura, no representa su negación sino su confirmación.

Sabemos bien que esta relación de la geometría y de las matemáticas con su historia contrasta con la posición de quienes sostienen que lo que da cuenta de ellas, de lo que son y por lo que son, es fundamentalmente su *estructura*, ya sea una estructura lógico-deductiva o una estructura que da cuenta orgánica del modo en el que las distintas teorías de vinculan y se interrelacionan. No pretendemos negar estas visiones, más bien reclamaremos que en ellas y a través de ellas se pone de manifiesto la historia que vive en las matemáticas.

La obra que analizaremos en esta perspectiva, una obra que ha llegado a nosotros con el simple título de *Elementos* (Στοιχεια), no será tomada como pretexto para una nueva reedición de este debate, y tampoco para revivir otro debate que se refiere al modo específico de llevar a cabo un análisis histórico, puesto que no se debe olvidar que toda teoría científica, y la geometría no tendría por qué faltar a ello, y toda imagen del mundo son un reflejo claro de la época en la que surgieron. Ello obligaría a reconocer que, si bien la geometría euclidiana proviene de un horizonte histórico particular, puede y debe contemplarse en otro mucho más amplio, cuya historia incluye no únicamente su génesis, sino también su difusión, su expansión, y su asentamiento como una de las obras más importantes de las matemáticas. Se trata de una obra escrita y concebida hacia el siglo III a.C., la que desde esa época comienza a transmitirse y difundirse; la historia de este origen y su difusión no son ajenas al hecho de que sobre dicha obra sigue viva la discusión acerca de cuál es, o cuál pudo haber sido, la versión original. En esta perspectiva es un gran reto comprender en toda su extensión el cambio conceptual que tuvo lugar en las matemáticas a lo largo de varios siglos, para dar cuenta posteriormente de sus transformaciones a partir del siglo VIII y hasta el siglo XI, y posteriormente retomar los cambios que fueron introducidos para su difusión cuando apareció la imprenta hacia fines del siglo XV, dejando de lado con ello la difusión de versiones manuscritas y dando paso a las versiones impresas. Ello desde luego obliga a considerar también el público al que dicha obra ha sido dirigida, no sólo por su primer autor sino por sus muy diversos editores, traductores y compiladores.

Si bien consideramos importante este enfoque que nos obliga a tomar en cuenta cada uno de estos horizontes históricos y culturales que apenas hemos mencionado, sugerimos concentrarnos en una reflexión conceptual que se refiere al debate sobre la naturaleza de la geometría plana en la perspectiva que el mismo texto nos refiere. No hay duda de que en este caso confluyen distintos elementos que difícilmente pueden separarse por completo: se trata de revisar de manera somera la historia de la geometría no sólo en lo que se refiere a su origen como una nueva teoría, o la de una nueva manera de entender la estructura de una disciplina deductiva, lo que hace parcialmente posible también el advenimiento de un nuevo aparato formal para dar cabida en su seno a la geometría clásica. Al momento de buscar el enfoque *conceptual* en la historia de la geometría, tomando como pretexto la obra de Euclides, consideramos que es posible acceder a través de éste a un mecanismo más, a un mecanismo privilegiado, para la *comprensión* de la matemática misma.

Con esta perspectiva que permite un tejido más fino en el marco general que habíamos delineado, nos proponemos recrear un contexto histórico y epistemológico que busca explicar las condiciones de los sucesivos cambios conceptuales, mismos que desde luego abonan en la cada vez mayor comprensión de lo que se busca conocer, y que también permite dar cuenta del encadenamiento conceptual mismo, planteado en su desarrollo histórico. De este modo lograremos hacer ver que la historia deviene un instrumento de la comprensión matemática.

En esta perspectiva queremos que la historia devenga presente, como un medio de dar cuenta del presente de la geometría, ya que el horizonte conceptual que Euclides concibió para su desarrollo sigue siendo el horizonte en el cual se comprende dicha disciplina. Es claro que desde la perspectiva que permite abrir el horizonte histórico que planteamos, se desprende la necesidad de replantear la pregunta por el *origen* de las matemáticas y aproximarnos así a las variantes que se han desplegado en momentos distintos. Podemos intentar así una aproximación al problema del origen de la geometría como disciplina deductiva, si bien en el presente volumen sólo nos ocuparemos de la geometría plana, y de hecho de un aspecto de ella, para continuar en otros volúmenes con la geometría basada en la teoría de proporciones, la aritmética y la geometría sólida. Con ello será posible presentar un panorama completo del contenido de los *Elementos*, pero debemos aclarar que nuestro trabajo busca dar cuenta, en cada caso, de los teoremas que consideramos fundamentales y que en cada caso desempeñan un papel que puede ser teleológico o articulador, pero son los que dan cuenta del sentido de la geometría que se despliega.

No se trata entonces de enunciar y comentar todas las proposiciones de las que se ocupan los primeros dos libros de los *Elementos*, ni tampoco nos limitaremos a dar cuenta, en los casos pertinentes, del origen de estos enunciados; más bien trataremos de mostrar cómo detrás de ellos, y en consonancia con el vínculo deductivo que hace que unas se desprendan de otras, se teje el sentido y el propósito que a nuestro juicio animó al autor euclidiano a llevar a cabo la escritura de esta obra. Estamos seguros de que, sin minimizar las diferencias existentes entre las distintas ediciones de los *Elementos* a lo largo de casi veinte siglos y sin dejar de señalar las variantes, las interpolaciones y añadidos a los que está sujeta una obra tantas veces traducida, comentada y actualizada, el sentido al que nos referimos no ha dejado de estar presente en la articulación que su autor buscó imprimirle a su obra. Ya sea que hablemos de las versiones que presumiblemente se encuentran libres de las interpolaciones que marcaron las ediciones que siguieron el camino que inauguró Teón de Alejandría, o bien aquellas que varios siglos después comenzaron a ser consideradas como comentarios y recensiones, o aun aquellas que a fines del siglo XVI portaban un cúmulo de teoremas, enunciados y comentarios nuevos, incluyendo variantes en el contenido del marco axiomático básico, dejando con ello en claro la mano de quien las preparó, creemos que el *sentido* marcado por lo teoremas fundamentales que iremos comentando, y que marcan el camino y el contenido de la geometría plana de la congruencia, sigue la ruta marcada por la versión original y ninguna edición ulterior, pese a los añadidos que hemos mencionado, ha dejado de lado.

Euclides es sin duda heredero de una tradición en la práctica de la geometría plana, es sin duda coautor de un nuevo modo de tejer la relación entre las distintas proposiciones geométricas que le otorgan a esta disciplina el carácter *deductivo* que la hace distintiva. Pero es sin duda quien encuentra el modo de articular a las proposiciones de la geometría plana para dar cuenta de dos modalidades claramente distinas, de las cuales una se despliega a través de la teoría de proporciones, de reciente reformulación y consolidación en su época, y la otra que le antecede y que se sabe independiente de ésta. Esta diferencia permite concebir dos grupos de enunciados fundamentales sobre los cuales cada una de ellas se despliega y que proporciona un nuevo perfil de la geometría en tanto que ciencia deductiva. La novedad eculidiana se encuentra, desde luego, en el marco axiomático sobre el cual descansa este carácter deductivo de la geometría, pero sobre todo se encuentra en esta diferencia que hemos señalado, lo que obliga a perfilar para cada una de estas dos geometrías, las que hemos denominado la *geometría de la congruencia* y la *geometría de la semejanza*, las proposiciones que marcan su derrotero principal. Es de este modo que se organiza una disciplina que sabe y toma conciencia de las preguntas y problemas que orientan su camino, y las que guían el orden de las respuestas que se van tejiendo paso a paso. Con la obra de Euclides es posible dar respuesta a la pregunta de cuál es el sentido de la geometría.

Es una caracterización errónea, y en realidad es un engaño, asegurar que la geometría plana euclidiana se dedica al estudio de las figuras geométricas planas, ya que, como lo veremos, en los primeros dos libros de los *Elementos* sólo se despliega el estudio de algunas relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, para pasar posteriormente al estudio de las relaciones similares en el caso de los paralelogramos y los rectángulos. El círculo, como figura geométrica plana, es en estos primeros dos libros tan sólo una figura auxiliar, una figura clave para llevar a cabo las construcciones geométricas requeridas para las demostraciones, pero una figura auxiliar, a fin de cuentas. De entre estos teoremas relacionados con los triángulos y las magnitudes que los determinan, destacarán seis de ellos, y veremos cómo un objetivo primordial de Euclides es desplegar con detalle el encadenamiento y la prueba de estas proposiciones; es para ellas que se enuncian y prueban los teoremas de congruencia de triángulos, es a través de ellas que dichos teoremas despliegan su papel *fundamental*.

Sabemos que una de las características centrales del texto de Euclides es la de conjuntar dos teorías cuya relación es oscilante y desigual: por un lado, una teoría que se ocupa de las *magnitudes continuas* y otra que se refiere a las *magnitudes discretas*. Pero este aspecto aparentemente complementario entre la geometría y la aritmética parece romperse al momento en el que se vislumbra el sustrato (axiomático) sobre el que se apoyan ambas teorías. El único soporte común para la geometría y la aritmética lo constituyen las *Nociones Comunes* (κοιναι ἔννοιαι) que aseguran que en cualquier dominio de magnitudes es posible realizar operaciones de anexar o remover, poner o quitar, magnitudes a una magnitud ya considerada. Si bien estas nociones comunes asumen de manera implícita la realización de dichas operaciones de adición y sustracción, en lo que son explícitas es en la afirmación de la permanencia de la igualdad bajo estas operaciones, cuando iguales se añaden o quitan a iguales. De este modo, lo que por dichas operaciones se habrá de entender estará sujeto en la geometría a lo que las construcciones geométricas permitirán llevar a cabo; prolongar una línea dada de modo que se pueda garantizar que dicha extensión tiene una magnitud igual a otra línea, podrá ser considerado de manera legítima como el significado preciso de la adición de líneas rectas. De acuerdo con ello es posible decir que no habrá ningún marco formal que permita desarrollar las operaciones entre magnitudes geométricas que sea independiente de las construcciones geométricas y de las relaciones que los teoremas geométricos *fundamentales* permiten concluir. Es por ello que la geometría no puede aceptar que las operaciones entre magnitudes sean el resultado de una definición, por lo que requieren de la presencia, junto con las *nociones comunes*, de otro grupo de enunciados, los *postulados* o demandas constructivas (αἰτήματα). Sólo a partir de dichas demandas se pueden llevar a cabo las construcciones (geométricas) a través de las cuales dichas operaciones, anunciadas por las nociones comunes, cobran sentido. Si la geometría tiene este propósito específico, ello da cuenta de que el marco axiomático completo propuesto por Euclides fue concebido para justificarlo y hacerlo posible.

Pero si las nociones comunes contemplan las operaciones de adición y sustracción en la perspectiva que hemos señalado, las operaciones de multiplicación y división entre líneas rectas obligará al autor de los *Elementos* a recorrer un camino mucho más sinuoso; en su momento veremos cómo es que, sin hacer mención explícita de ella, esta operación subyace a lo que geométricamente es posible asegurar, hacer y construir en la geometría de los paralelogramos y los rectángulos de la cual se dará cuenta en el Libro II de los *Elementos*.

De este modo la obra que presentamos tiene como objetivo analizar un texto, una obra escrita, dar cuenta de su genealogía, pero sobre todo de su contenido y del significado que adquiere esta disciplina y del camino que ha seguido su transmisión. En este primer volumen nos dedicaremos, en la perspectiva que hemos señalado, al contenido de la geometría plana de las figuras rectilíneas; a ello seguirán, en volúmenes posteriores, el análisis de la geometría del círculo; el análisis del origen y desarrollo de la teoría de proporciones, el estudio de las magnitudes conmensurables e inconmensurables y el de la geometría de la semejanza de figuras planas rectilíneas; el estudio de la aritmética y finalmente el estudio de la geometría sólida. Sabemos que con ello se completa el objetivo que presumiblemente se planteó su autor al concebir y redactar los *Elementos*, sabemos también que con ello quedó relegado a un segundo plano el estudio y tratado de las curvas mecánicas, y al mismo tiempo quedó delineado como un objetivo futuro, aunque sin haber sido mencionado, el estudio de las secciones cónicas.

Es por ello que el contenido de este presente volumen ha sido dividido en tres partes, que incluyen un estudio de la historia del texto del cual nos ocupamos, el estudio del marco axiomático que subyace a la geometría de las figuras rectilíneas, y de la que se desprende el estudio de las propiedades del triángulo como la figura rectilínea más simple. Este estudio supone, con relación al marco axiomático que presenta Euclides, todas aquellas propiedades que son independientes del último postulado y el de todas las propiedades que dependen de él. Ello nos permitirá hacer ver todo el peso histórico, epistemológico y lógico que conlleva la introducción de dicho postulado, concebido con razón como una de las mayores aportaciones del autor de los *Elementos*. La tercera parte de este volumen estará dedicada al estudio de los cuadriláteros y, en particular, de los cuadrados como figuras planas rectilíneas, estudio en el cual se destaca el hecho de que todo lo que Euclides prueba acerca de esta figura, las posibles formas de *componerlo* y *descomponerlo* dependen también de dicho postulado.

Decir pues que este volumen trata de la geometría plana contenida en los dos primeros libros de los *Elementos*, es decir muy poco, pero es también es decirlo todo, pues a partir de esta obra cobra pleno sentido esta disciplina que llamamos geometría.