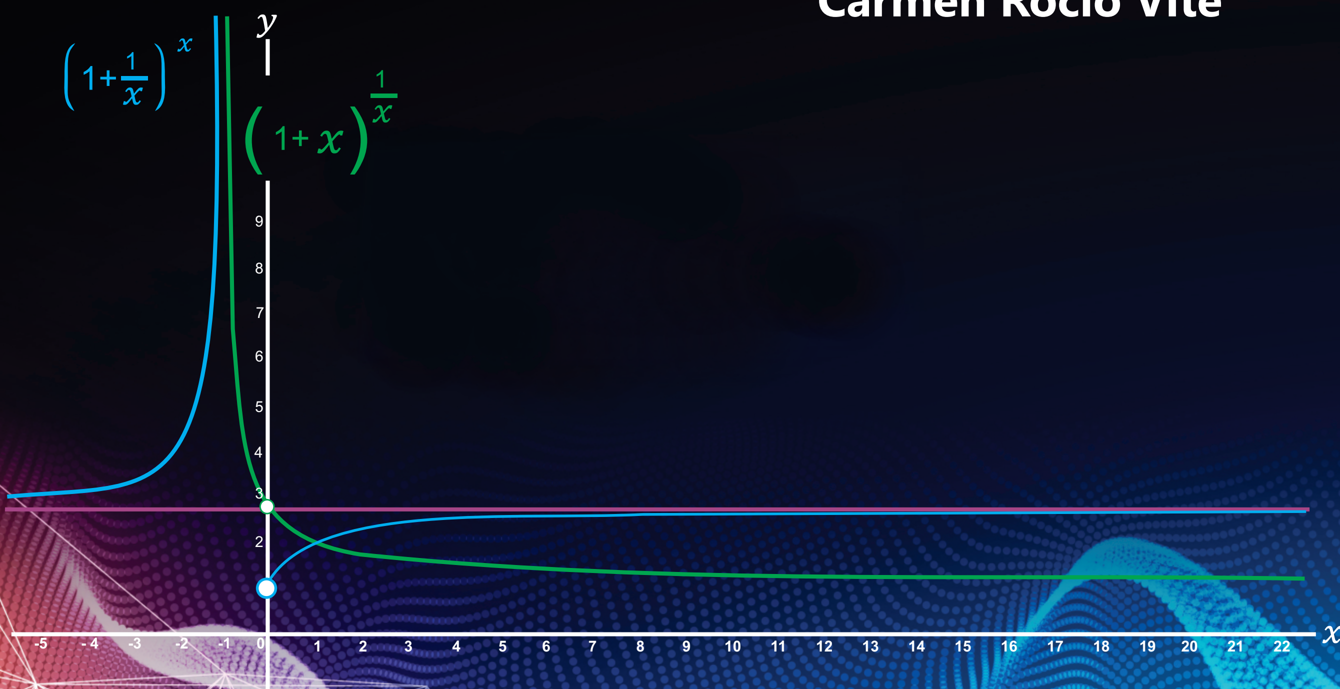
Un número de gran interés

Carmen Rocío Vite



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
SDI SECRETARÍA DE DESARROLLO INSTITUCIONAL
SUMEM
Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM

Catalogación en la publicación UNAM. Dirección General de Bibliotecas

Nombres: Vite, Carmen Rocío, autor.
Título: Un número de gran interés / Carmen Rocío Vite.
Descripción: Primera edición. | Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
Identificadores: LIBRUNAM 2092425 (libro electrónico) | ISBN 978-607-30-3801-0 (libro electrónico).
Temas: Análisis matemático -- Libros de texto. | Cálculo -- Libros de texto. | Matemáticas -- Libros de texto.
Clasificación: LCC QA300 (libro electrónico) | DDC 515—dc23

Los contenidos de la obra fueron analizados con software de similitudes por lo que cumplen plenamente con los estándares científicos de integridad académica, de igual manera fue sometido a un riguroso proceso de dictaminación doble ciego con un resultado positivo, el cual garantiza la calidad académica del libro, que fue aprobado por el Comité Editorial de la Secretaría de Desarrollo Institucional.

AVISO LEGAL

Un número de gran interés

Esta edición de un ejemplar (4.4. MB) fue preparada por la Secretaría de desarrollo Institucional, la producción y formación fue realizada por Patricia Muñetón Pérez, y el cuidado de la edición estuvo a cargo de la maestra Carmen Rocío Vite González.

Primera edición electrónica: 31 de diciembre de 2020

ISBN de la obra 978-607-30-3801-0

RESUMEN

Esta secuencia de actividades es una propuesta para presentar, a estudiantes de bachillerato, a uno de los números más notables en matemáticas, el número *e*. El objetivo es que el alumno visualice cómo el número *e* aparece en un problema de interés común para el ser humano (el dinero).

Sin menoscabar la importancia del número *e,* la presentación de este número es un magnífico pretexto para transitar entre diversos temas que se estudian en el bachillerato, es decir el estudio del número *e* nos permite contextualizar dichos temas. De hecho, esta secuencia pretende conectar suavemente dos temas *Teorema del Binomio de Newton* y *Sucesiones,* la vía de conexión entre estos temas es una serie de problemas de *Interés Compuesto.* Posteriormente se hará el tránsito entre *Sucesiones* y *Series*. En este tránsito aparecerá el tema de *Funciones,* en particular *gráfica, dominio y límite de funciones.*

La secuencia está pensada para llevarse a cabo con alumnos del área 1, del último nivel de bachillerato. Y de manera más específica para aquellos que cursan las materias de *Cálculo Diferencial e Integral*, y *Temas Selectos de Matemáticas*.

Esta secuencia se desarrolla bajo el supuesto de contar con aulas provistas con las nuevas tecnologías como proyector y computadoras (se usará el software GeoGebra). También se presupone que los alumnos dispondrán, fuera del salón, de clase de una computadora. Si en el momento de desarrollar esta secuencia este supuesto no es válido, se tendrán que hacer las modificaciones pertinentes.

Además de la secuencia de actividades propiamente dicha, recomendaciones al profesor de cómo presentarla y material dirigido a los estudiantes, se anexa un apéndice dirigido exclusivamente al profesor en la que se demuestran de manera rigurosa algunas propiedades relacionadas con el número *e.*

I. INTRODUCCIÓN

Esta secuencia de actividades es una propuesta para presentar a uno de los números más notables en matemáticas, el número *e*.

Los objetivos de esta secuencia son que el alumno:

- visualice cómo el número *e* aparece en un problema de interés común para el ser humano (el dinero);
- visualice cómo diversos temas en matemáticas se entrelazan;
- transite por diversos temas en matemáticas, mediante un hilo conductor y
- aplique conocimientos estudiados previamente.

Conceptos matemáticos involucrados

- Interés simple e Interés compuesto
- Teorema del Binomio
- Sucesiones
- Límites
- Funciones
- Series

Procedimientos involucrados

- Manipulación aritmética y algebraica.
- Uso de software GeoGebra.

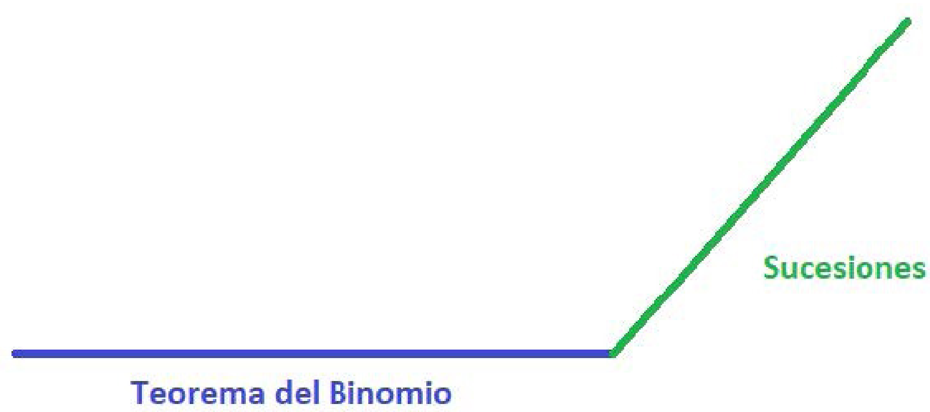
Recursos materiales

- Hojas blancas y cuadriculadas y lápices o bolígrafos de colores.
- Pizarrón y gises o plumones de colores.
- Computadora o tableta.
- Pizarrón blanco y cañón.
- Celular o tableta.

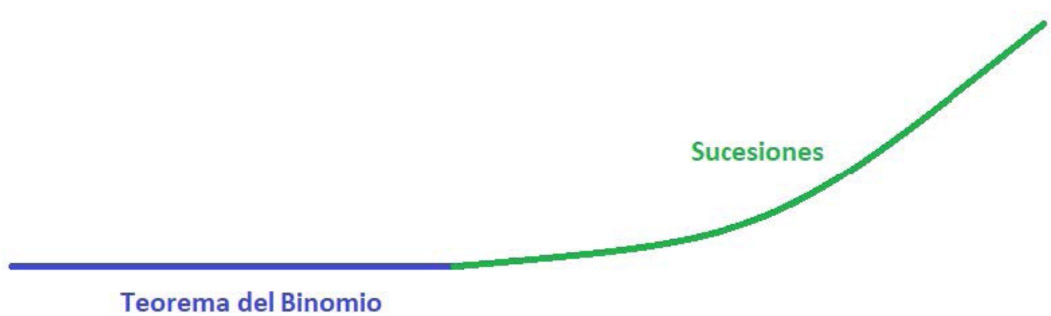
Programas del Bachillerato de la UNAM involucrados.

- Cálculo I, CCH. (Quinto semestre)
- Matemáticas VI (áreas 1 y 2), ENP. (Sexto año)
- Matemáticas VI (área 3), ENP. (Sexto año)
- Temas Selectos de Matemáticas, ENP. (Sexto año)

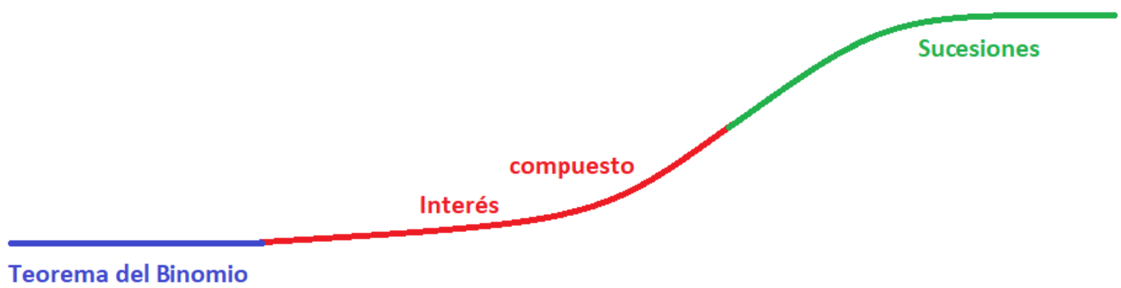
De hecho, esta secuencia pretende conectar dos temas que aparecen en los cursos de matemáticas de sexto año: *Teorema del Binomio de Newton* (Temas Selectos de Matemáticas, ENP) y *Sucesiones* (Matemáticas VI, ENP o Cálculo I, CCH).



Y se pretende conectarlos suavemente



La vía de conexión entre estos temas es una serie de problemas de *interés compuesto.*



Se presentan en total doce actividades, en la primera actividad se plantea un problema de *Interés Simple*, en las actividades 2 y 3 se presenta un problema de *Interés Compuesto*, en donde se hace patente la diferencia entre interés simple e interés compuesto, y en cuya solución interviene la *Fórmula del Binomio de Newton*, en las siguientes cuatro actividades se trabaja con problemas de *Interés Compuesto* y el objetivo es dar pie a un *proceso infinito,* en cuyo límite surge el número *e.* En las actividades 8 y 9 se presentan otros límites clásicos, cuyo valor es *e*. En la actividad 10 aparece el número *e*, ahora como una serie. En la actividad 11 se establece un resumen de los resultados obtenidos. Finalmente, en la actividad 12 los alumnos platicarán de manera informal sobre aplicaciones del número *e*, con el objetivo tanto de reafirmar la importancia del número *e* desde otros enfoques, así como el de vislumbrar nuevas líneas de trabajo.

El tiempo estimado para desarrollar la secuencia es de 14 clases de 50 minutos, o bien 12 clases de una hora.

Además, presento un apéndice dirigido al profesor. Con el objeto de reflexionar en la parte teórica del tema.

En cuanto a la estructura de esta secuencia, están enmarcadas (marco doble) con color azul el material dirigido a los alumnos, de tal manera que sea distinguible de la descripción de actividades, las sugerencias y los comentarios dirigidos al profesor. Considero pertinente hacer algunas recomendaciones para el profesor en el momento de describir una actividad en particular y no hasta el final de la secuencia.

Rocío Vite

II. ACTIVIDADES

Actividad 1: El objetivo de esta actividad es introducir al alumno en el tema de inversión de un capital, con el caso más sencillo, *interés simple*.

Tiempo: 30 minutos.

Actividad 1	Tema	Descripción	Tiempo estimado en minutos
1.1	Interés simple	◊ Convención ◊ Cuestionario individual ◊ Conclusión	20 10

1.1 Se les presenta a los alumnos el siguiente cuestionario. Se pide resolverlo individualmente. La razón por la cual la actividad es individual es que el alumno lea con detenimiento el problema, a su ritmo y sin interrupciones para comprenderlo.

Tiempo: 20 minutos.

Convención: Se les informará a los alumnos que en esta secuencia de actividades, por comodidad, supondremos que los años constan de 360 días.

Cuestionario 1.1. (Aula)

El Banco BPLE te ofrece el 0.1% de interés simple si inviertes tu dinero a plazo fijo de un mes. Supón que tú inviertes $1,000,000.00.

(1.1.a) ¿Qué intereses generará tu dinero al cabo de un mes?

____

(1.1.b) ¿Cuánto dinero tendrás al cabo de un mes?

____

(1.1.c) Si regresas al banco en dos meses, ¿cuánto dinero disponible tendrás?

____

(1.1.d) Si regresas al banco después de tres meses, ¿cuánto dinero tendrás disponible?

____

(1.1.e) Si saliste de viaje y regresas al banco después de seis meses, ¿cuánto dinero se habrá acumulado?

____

(1.1.f) Si el viaje dura un año, ¿cuánto dinero disponible tendrás a tu regreso?

____

Para el alumno

Después de que los alumnos entreguen su cuestionario se les pedirá que ellos resuelvan los problemas en el pizarrón.

Tiempo: 10 minutos.

Actividad 2: En esta actividad se trabajará con problemas de interés compuesto, en cuya solución se usará la Fórmula del Binomio de Newton.

Tiempo: 130 minutos.

Actividad 2	Tema	Descripción	Tiempo estimado en minutos
2.1	Interés compuesto	◊ Cuestionario individual. ◊ Discusión.	20 20
2.2	Interés compuesto	◊ Tabla de captura e inferencia. Escrita en forma conveniente por el Profesor.	20
2.3	Interés compuesto	◊ Cuestionario. Trabajo en equipos de tres alumnos. ◊ Discusión.	15 10
2.4	Interés compuesto	◊ Solución simplificada usando la fórmula del binomio de Newton. ◊ Dos casos.	10 15
2.5	Interés compuesto	◊ Aproximación de solución simplificada. Un caso.	20

2.1. Se les presenta a los alumnos el siguiente cuestionario. Se pide resolverlo individualmente.

Tiempo: 20 minutos.

Cuestionario 2.1 (aula)

El Banco BCOM ofrece el 0.1% de interés compuesto mensual. Supón que tú inviertes $1,000,000.00.

(2.1.a) ¿Qué intereses generará tu dinero al cabo de un mes?

(2.1.b) ¿Cuánto dinero tendrás al cabo de un mes?

(2.1.c) Si regresas al banco en dos meses, ¿cuánto dinero disponible tendrás?

(2.1.d) Si regresas al banco después de tres meses, ¿cuánto dinero tendrás disponible?

(2.1.e) Si saliste de viaje durante seis meses, ¿cuánto dinero se habrá acumulado a tu regreso?

(2.1.f) Si el viaje dura un año, ¿cuánto dinero disponible tendrás a tu regreso?

Para el alumno

Después de que los alumnos entreguen su cuestionario se discutirán los problemas en el grupo, se contrastará con el cuestionario anterior, y los alumnos resolverán algunas preguntas en el pizarrón, las que ellos hayan alcanzado a resolver.

Tiempo: 20 minutos (en este caso el tiempo puede variar mucho en función de lo que los alumnos hayan logrado).

2.2 Con relación al cuestionario anterior, sabemos que los alumnos lo habrán entendido e incluso resuelto, sin embargo, eso no será suficiente para lograr el objetivo de esta secuencia, se necesita que ellos reconozcan patrones, por este motivo, el profesor debe redactarlo en el pizarrón, haciendo notar que está haciendo lo mismo que los alumnos (ensalzando el trabajo de éstos*) sólo que él lo escribirá de una forma especial, con la finalidad de dar paso a una generalización. El profesor escribirá la tabla 2.2.

Tiempo: 20 minutos.

*Un ejemplo: A un alumno se le pide calcular el 0.1 % de 1000

El alumno sólo escribe: 1.

El profesor pregunta: ¿Por qué uno?

Y el alumno contesta: Porque mil entre mil es uno.

El alumno entendió y resolvió perfectamente el ejercicio. Sin embargo, su argumento no es claro, en especial para otro alumno que no pudo contestar la pregunta, y tampoco es útil para los fines que perseguimos.

Tabla 2.2 En esta tabla se describe el dinero acumulado si no hay ningún retiro hasta el mes correspondiente.

MES	Dinero acumulado (en pesos)
0	10^6
1	$10^6 + \frac{0.1}{100}10^6 = \left(1+\frac{0.1}{100}\right)10^6 = 10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)$
2	$10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right) + \frac{0.1}{100}10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right) = \left(1+\frac{0.1}{100}\right)10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right) = 10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^2$
3	Desarrollar y obtener $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^3$
. . .	
15	Inferir: $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{15}$
. . .	
k	Inferir $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^k$

Los alumnos deducirán cuánto dinero habrá en 3 meses, inferirán cuánto dinero disponible habrá en 15 y en k meses, y completarán los renglones correspondientes de la tabla.

2.3 Presentar a los alumnos el siguiente cuestionario para que lo resuelvan en equipos de tres estudiantes.

El objetivo de esta actividad es que el alumno, use el Teorema del Binomio. Él no puede contestarle a su amigo que en un año tendrá 1000000 $\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{12}$ pesos.

Tiempo: 15 minutos.

Cuestionario 2.3

Si una persona a quien tú estimas, que no ha ido a la escuela, te pide ayuda. Él ganó un millón de pesos en la lotería y quiere saber cuánto tendrá si invierte su dinero en el banco BCOM. Él estará dispuesto a no tocar su dinero en el tiempo señalado, ¿qué le responderías?

(2.3.a) Un mes ____

(2.3.b) Dos meses ____

(2.3.c) Seis meses ____

(2.3.d) Un año ____

(2.3.e) Dos años ____

Para el alumno

Después de que los alumnos entreguen su cuestionario, tendrá lugar la discusión en el curso. Se observará que algunas de las respuestas, ya las habían dado en el cuestionario anterior.

Tiempo: 10 minutos.

2.4 El Profesor guiará a los alumnos para resolver, usando la fórmula del binomio de Newton, las preguntas (2.3.b) y (2.3.c).

Tiempo: 10 minutos y 15 minutos.

Solución de (2.3.c):

$$\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^6=\sum_{i=0}^{6}\frac{6!}{(6-i)!\,i!}1^{6-i}\left(\frac{0.1}{100}\right)^i=\sum_{i=0}^{6}\frac{6!}{(6-i)!\,i!}\left(\frac{1}{1000}\right)^i=\sum_{i=0}^{6}\frac{6!}{(6-i)!\,i!}\frac{1}{10^{3i}}=$$

$$\frac{6!}{6!\,0!}\frac{1}{10^{3(0)}}+\frac{6!}{5!\,1!}\frac{1}{10^{3(1)}}+\frac{6!}{4!\,2!}\frac{1}{10^{3(2)}}+\frac{6!}{3!\,3!}\frac{1}{10^{3(3)}}+\frac{6!}{2!\,4!}\frac{1}{10^{3(4)}}+\frac{6!}{1!\,5!}\frac{1}{10^{3(5)}}+\frac{6!}{0!\,6!}\frac{1}{10^{3(6)}}=$$

$$\frac{1}{1}\frac{1}{10^0}+\frac{6}{1}\frac{1}{10^3}+\frac{5(6)}{2}\frac{1}{10^6}+\frac{4(5)6}{2(3)}\frac{1}{10^9}+\frac{5(6)}{2}\frac{1}{10^{12}}+\frac{6}{1}\frac{1}{10^{15}}+\frac{1}{1}\frac{1}{10^{18}}=$$

$$1+\frac{6}{10^3}+\frac{15}{10^6}+\frac{20}{10^9}+\frac{15}{10^{12}}+\frac{6}{10^{15}}+\frac{1}{10^{18}}$$

Por tanto

$$\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^6=1+\frac{6}{10^3}+\frac{15}{10^6}+\frac{20}{10^9}+\frac{15}{10^{12}}+\frac{6}{10^{15}}+\frac{1}{10^{18}}\Rightarrow$$

$$10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^6=10^6\left(1+\frac{6}{10^3}+\frac{15}{10^6}+\frac{20}{10^9}+\frac{15}{10^{12}}+\frac{6}{10^{15}}+\frac{1}{10^{18}}\right)=$$

$$10^6+6(10^3)+15+\frac{20}{10^3}+\frac{15}{10^6}+\frac{6}{10^9}+\frac{1}{10^{12}}=$$

$$1000000+6000+15+.02+.000015+.000000006+.000000000001=$$

$$1006015.020015006001$$

El dinero disponible en el banco a los seis meses es \$1,006,015.02. Y si el dueño del capital decide retirar su dinero, el banco sólo le devolverá \$1,006,015.00.

Resumiendo, pudimos dar con precisión la expresión decimal de $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^6$, sin embargo, dado el problema específico que estamos resolviendo, las cifras decimales después de las centésimas fueron irrelevantes.

2.5 Usando la Fórmula del Binomio de Newton, se dará una "buena" aproximación como respuesta a (2.3.e).

Tiempo: 20 minutos.

$$\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{24}=\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{24}=\sum_{i=0}^{24}\frac{24!}{(24-i)!i!}1^{24-i}\left(\frac{1}{10^3}\right)^{i}=$$

$$\sum_{i=0}^{24}\frac{24!}{(24-i)!i!}\frac{1}{10^{3i}}\approx\sum_{i=0}^{4}\frac{24!}{(24-i)!i!}\frac{1}{10^{3i}}=$$

$$\frac{24!}{(24-0)!0!}\frac{1}{10^{3(0)}}+\frac{24!}{(24-1)!1!}\frac{1}{10^{3(1)}}+\frac{24!}{(24-2)!2!}\frac{1}{10^{3(2)}}+\frac{24!}{(24-3)!3!}\frac{1}{10^{3(3)}}+\frac{24!}{(24-4)!4!}\frac{1}{10^{3(4)}}=$$

$$\frac{24!}{24!0!}+\frac{24!}{23!1!}\frac{1}{10^3}+\frac{24!}{22!2!}\frac{1}{10^6}+\frac{24!}{21!3!}\frac{1}{10^9}+\frac{24!}{20!4!}\frac{1}{10^{12}}=$$

$$\frac{1}{1}+\frac{24}{1}\frac{1}{10^3}+\frac{23(24)}{2}\frac{1}{10^6}+\frac{22(23)24}{2(3)}\frac{1}{10^9}+\frac{21(22)23(24)}{2(3)4}\frac{1}{10^{12}}=$$

$$1+\frac{24}{10^3}+\frac{23(12)}{10^6}+\frac{22(23)4}{10^9}+\frac{21(22)23}{10^{12}}=1+\frac{24}{10^3}+\frac{276}{10^6}+\frac{2024}{10^9}+\frac{10626}{10^{12}}\Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}\approx 1+\frac{24}{10^3}+\frac{276}{10^6}+\frac{2024}{10^9}+\frac{10626}{10^{12}}\Rightarrow$$

$$10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}\approx 10^6\left(1+\frac{24}{10^3}+\frac{276}{10^6}+\frac{2024}{10^9}+\frac{10626}{10^{12}}\right)=$$

$$10^6+24(10^3)+276+\frac{2024}{10^3}+\frac{10626}{10^6}=$$

$$1000000+24000+276+2.024+0.010626=1024278.034626.$$

El dinero disponible en el banco a lo largo de 2 años es \$1024278.03 . De hecho, si el dueño del capital decide retirarlo, el banco le entregará \$1024278.05.

.

Actividad 3: Esta actividad tiene como objetivo reflexionar sobre si fue “buena” la aproximación dada en la actividad anterior.

Tiempo: 60 minutos.

Actividad 3	Tema	Descripción	Tiempo estimado en minutos
3.1	Teorema del Binomio	◊ Cuestionario. En equipos de tres alumnos. ◊ Discusión.	20 20
3.2	Teorema del Binomio	◊ Exposición del profesor si es que los alumnos no llegaron a la conclusión.	20

3.1 Se les presentan a los alumnos el siguiente cuestionario, pidiéndoles que lo resuelvan en equipos de tres alumnos.

Tiempo: 20 minutos.

Cuestionario 3.1

(3.1.a) En el desarrollo ordenado del binomio $(1 + b)^{24}$, ¿cuál es el coeficiente más grande? ______________________________

(3.1.b) En el desarrollo ordenado de la expresión binomial $(1 + b)^{24}$, ¿cuál es el $k-$ésimo término?

____

(3.1.c) En el desarrollo ordenado de la expresión binomial $\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$, ¿cuál es el $k-$ésimo término?

____

(3.1.d) En el desarrollo ordenado de la expresión binomial $\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$, ¿cuál es el sexto término?

____

(3.1.e) ¿Qué dígito aparece en el lugar de las milésimas en la expresión decimal del sexto término, del desarrollo de $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$?

____

(3.1.f) ¿Qué dígito aparece en el lugar de las milésimas, en la expresión decimal del noveno término del desarrollo $10^6\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$?

____

Para el alumno

A la entrega del cuestionario, los alumnos deben resolver los ejercicios en el pizarrón (debe esperarse que ellos respondan sin dificultad las primeras cinco preguntas).

Tiempo: 20 minutos

3.2 El profesor debe redactar la sexta respuesta.

Tiempo: 20 minutos.

Se sugiere lo siguiente:

Como el mayor coeficiente numérico en el desarrollo de $(1+b)^{24}$ es $C_{24}^{12} = 2704156$, los otros coeficientes tienen a lo más siete cifras.

El $(k+1)-ésimo$ término de $\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$ es $C_{24}^{k}\left(\frac{0.1}{100}\right)^{k} = \frac{C_{24}^{k}}{10^{3k}}$

El $(k+1)-ésimo$ término de $10^{6}\left(1+\frac{0.1}{100}\right)^{24}$ es

$$(10^{6})\frac{C_{24}^{k}}{10^{3k}} = \frac{10^{6}C_{24}^{k}}{10^{3k}} = \frac{C_{24}^{k}}{10^{3(k-2)}}$$

Nótese además que $5 \le k \le 24 \Rightarrow 3(5-2) \le 3(k-2) \Rightarrow 9 \le 3(k-2)$.

Y como C_{24}^{k} es un natural si $k > 5$, el número $\frac{C_{24}^{k}}{10^{3(k-2)}}$ es menor que 1 y su expresión decimal tiene, al menos, cinco ceros consecutivos después del punto decimal, el alumno al responder 3.1.d, se dará cuenta que si $k = 5$, el número $\frac{C_{24}^{k}}{10^{3(k-2)}}$ tiene cuatro ceros consecutivos después del punto decimal, por lo que la suma de estos términos es insignificante, si pensamos que estamos hablando de dinero.

Con base en lo anterior se concluye que la suma de los primeros cinco términos coincidirá con la suma total hasta las centésimas, puesto que la suma de los veinte $(k+1)$ - $ésimos$ términos con $5 \le k \le 24$ tiene ceros hasta las milésimas, y esto significa que ***la suma de los cinco primeros términos es una buena aproximación.***

Actividad 4: En esta actividad se presenta un proceso, el cual más tarde nos conducirá hacia el número *e*.

Tiempo: 150 minutos.

Actividad 4	Tema	Descripción	Tiempo estimado en minutos
4.1	Interés compuesto	◊ Trabajo en equipos de tres. Cuestionario. ◊ Discusión. ◊ Trabajo en equipos de tres. Cuestionario. ◊ Discusión .	10 05 20 20
4.2	Interés compuesto	◊ Cuestionarios individuales a casa (tres cuestionarios).	60
4.3	Interés compuesto	◊ Discusión sobre cuestionarios de examen a casa. ◊ Trabajo en equipos de tres. Un cuestionario. ◊ Discusión.	20 10 5

4.1 Se les entregará el siguiente cuestionario para que lo resuelvan en equipos de tres alumnos, pidiéndoles que se apoyen en la actividad anterior, pero dejando indicado el resultado (binomio) sin desarrollarlo.

Tiempo: 10 minutos.

Cuestionario 4.1.1

Banco BAL ofrece el 3% de interés compuesto anual. Supón que tú inviertes $1,000.00 y no retiras nada en el periodo que se pregunta.

(4.1.1.a) ¿Qué intereses generarán los mil pesos al cabo de un año?

(4.1.1.b) ¿Cuánto dinero tendrás en un año?

(4.1.1.c) ¿Cuánto dinero disponible tendrás al cabo de dos años?

(4.1.1.d) ¿Cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de diez años?

(4.1.1.f) ¿Cuánto dinero disponible tendrás al cabo de k años?

Para el alumno

Después de que los alumnos entreguen su cuestionario hacer una muy breve discusión en la que se concluya que el ejercicio es similar al realizado al resolver el cuestionario 2.1. Se proyecta la solución.

Tiempo: 5 minutos.

Se les pide a los alumnos que continúen trabajando en el mismo equipo, y se les presenta el siguiente cuestionario.

Tiempo: 20 minutos.

Cuestionario 4.1.2.

Si el Banco BSEM ofrece el 3% de interés anual, pero te permite retirar tu capital cada seis meses o reinvertirlo automáticamente junto con los intereses en caso contrario. Supón que inviertes $1,000.00

(4.1.2.a) ¿Qué intereses generarán al cabo de seis meses?

___

(4.1.2.b) ¿Cuánto dinero disponible habrá a los seis meses?

___

(4.1.2.c) Si no retiras ni un centavo, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de un año?

___

(4.1.2.d) Si no retiras nada en dos años, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de dos años?

___

(4.1.2.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de k semestres?

___

Para el alumno

A la entrega del cuestionario, se discute y los alumnos explicarán las respuestas en el pizarrón, desde luego el profesor debe supervisar. Al final se proyectan los resultados en pantalla.

20 minutos

Se les pide a los alumnos que continúen trabajando en equipo, y se les entrega el siguiente cuestionario.

Tiempo: 10 minutos.

Cuestionario 4.1.3

El Banco BME ofrece el 3% de interés anual, pero te da la opción de retirar tu capital cada mes o bien reinvertirlo automáticamente junto con los intereses si tú decides no retirar nada. Supón que inviertes $1,000.00.

(4.1.3.a) ¿Qué intereses generarán, esos mil pesos, al cabo de un mes?

____

(4.1.3.b) ¿Cuánto dinero tendrás disponible en un mes?

____

(4.1.3.c) Si no retiras ni un centavo, ¿cuánto dinero disponible habrá al cabo de un año?

____

(4.1.3.d) Si no retiras nada en dos años, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de dos años?

____

(4.1.3.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de k **meses?**

____

Para el alumno

Se hace notar que el cuestionario 4.1.3 es similar al 4.1.2. Se proyectan las respuestas en el pizarrón.

Tiempo: 5 minutos.

4.2 Cuestionarios para casa. Para lograr el objetivo de la secuencia es necesario que haya continuidad, para conectar una clase con otra es necesario que haya actividad en casa, la manera ideal es generar el interés del alumno, pero… para garantizar que el alumno continúe pensando en el tema, es conveniente darle un fuerte peso al trabajo en casa.

Se les pide que: para la siguiente clase entreguen los cuestionarios y los procedimientos (si es el caso) que hayan realizado para contestarlos.

Tiempo: 60 minutos.

Cuestionario 4.2.1 (en casa)

El Banco BQI ofrece el 3% de interés anual, pero te permite retirar tu capital cada quince días o reinvertirlo automáticamente junto con los intereses en caso de que no haya retiro. Supón que inviertes $1,000.00.

(4.2.1.a) ¿Qué intereses generarán en quince días?

____

(4.2.1.b) ¿Cuánto dinero disponible habrá en quince días?

____

(4.2.1.c) Si no retiras ni un centavo, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de un año?

____

(4.2.1.d) Si no retiras nada en dos años, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de dos años?

____

(4.2.1.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de k quincenas?

____

Para el alumno

Cuestionario 4.2.2. (casa)

El Banco BDI ofrece el 3% de interés anual, pero te permite retirar tu capital o reinvertirlo automáticamente junto con los intereses cada día. Supón que inviertes $1,000.00.

(Recordemos la convención: el año bancario consta de 360 días)

(4.2.2.a) ¿Qué intereses generarán $1,000.00 en un día?

____

(4.2.2.b) ¿Cuánto dinero tendrás disponible en un día?

____

(4.2.2.c) Si no retiras ni un centavo, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de un año?

____

(4.2.2.d) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de dos años?

____

(4.2.2.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de k días?

____

Para el alumno

Cuestionario 4.2.3 (en casa)

El Banco BHO ofrece el 3% de interés anual, pero te permite retirar tu capital cada hora bien o reinvertirlo junto con los intereses, en forma automática, cada hora. Supón que inviertes $1,000.00.

(4.2.3.a) ¿Qué intereses generarán $1,000.00 en una hora?

____

(4.2.3.b) ¿Cuánto dinero disponible tendrás en una hora?

____

(4.2.3.c) Si no retiras ni un centavo, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de un año?

____

(4.2.3.d) Si no retiras nada en dos años, ¿cuánto dinero disponible tendrás al cabo de dos años?

____

(4.2.3.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de k horas?

____

Para el alumno

4.3 En la siguiente clase después de recibir los tres cuestionarios se discuten en clase. Concluyendo que el ejercicio es similar al realizado con los tres cuestionarios vistos en clase. Se proyectan los tres cuestionarios con sus respectivas respuestas.

Tiempo: 20 minutos.

Se les pide a los alumnos que continúen trabajando en equipo, y se les presenta el siguiente cuestionario, éste es necesario para retomar el proceso en el salón de clase.

Tiempo: 10 minutos.

Cuestionario 4.3.1 (en el aula)

Si el Banco BMI ofrece el 3% de interés anual, pero te permite retirar tu capital o reinvertirlo junto con los intereses cada minuto. Supón que tú inviertes $1,000.00

(4.3.1.a) ¿Qué intereses generarán $1,000.00 al cabo de un minuto?

____

(4.3.1.b) ¿Cuánto dinero disponible tendrás en un minuto?

____

(4.3.1.c) Si no retiras ni un centavo, ¿Cuánto dinero tendrás al cabo de un año?

____

(4.3.1.d) Si no retiras nada en dos años, ¿cuánto dinero se habrá acumulado al cabo de dos años?

____

(4.3.1.e) Si no retiras nada, ¿cuánto dinero tendrás al cabo de k minutos?

____

Para el alumno

A la entrega del cuestionario se proyecta éste con respuestas.

Tiempo: 5 minutos.

Actividad 5: En esta actividad se captura la información sobre el proceso presentado en la actividad 4.

Tiempo: 45 minutos.

Esta actividad consta de tres etapas

Actividad 5	Tema	Descripción	Tiempo estimado en minutos
5.1	Interés compuesto	◊ Tabla de captura e inferencia, según los datos obtenidos en la actividad 4.	10
5.2	Interés compuesto	◊ La tabla de captura e inferencia anterior, escrita de manera "conveniente".	10
5.3	Interés compuesto	◊ Dos tablas de captura de inferencia, y de generalización.	20
5.4	Pregunta	◊ Si el periodo permitido para reinvertir es muy pequeño, ¿el dinero invertido se convertiría en una gran fortuna?	03
5.5	Pregunta	◊ Si el dinero se reinvierte instantáneamente, ¿el inversionista llegará a ser inmensamente rico?	02

5.1 Se presentará la siguiente tabla en el pizarrón y los alumnos pasarán a llenarla, de acuerdo con los resultados obtenidos en la actividad 4.

Tiempo: 10 minutos.

Tabla 5.1.1. Suponiendo que inviertes \$1,000.00 en los bancos anteriores y no retiras tu dinero antes de un año (recuerda que el interés anual es del 3%) ¿cuánto dinero habrás acumulado en un año?

Tabla 5.1

Se reinvierte	Dinero (en pesos) acumulado en un año
Se reinvierte **cada año**.	
Se reinvierte **semestralmente**.	
Se reinvierte **mensualmente**.	
Se reinvierte **quincenalmente**.	
Se reinvierte **diariamente**.	
Se reinvierte **cada hora**.	
Se reinvierte **cada minuto**.	
Se reinvierte **cada segundo**.	
Se reinvierte **cada** *n-ésima* **fracción de año**.	
Se reinvierte **instantáneamente**.	

Para el alumno

5.2 Se reescribe tabla 5.1. de manera "*conveniente*", en el pizarrón, como se ilustra a continuación.

Tiempo: 10 minutos.

Tabla 5.2 (Escrita por el profesor)

	Dinero (en pesos) acumulado en un año	*Dinero (en pesos) acumulado en un año (escrito convenientemente)*
Se reinvierte cada año.		
Se reinvierte semestralmente.		
Se reinvierte mensualmente.	$1000\left(1+\frac{1}{12}\frac{3}{100}\right)^{12}$	$1000\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1200}{3}}\right)^{\frac{1200}{3}}\right]^{\frac{3}{100}}$
Se reinvierte quincenalmente		
Se reinvierte diariamente.	$1000\left(1+\frac{1}{360}\frac{3}{100}\right)^{360}$	$1000\left[\left(1+\frac{1}{\frac{36000}{3}}\right)^{\frac{36000}{3}}\right]^{\frac{3}{100}}$
Se reinvierte cada hora.		
Se reinvierte cada minuto.		
Se reinvierte cada segundo.		
Se reinvierte cada n-*ésima* fracción de año.	$1000\left(1+\frac{1}{n}\frac{3}{100}\right)^{n}$	$1000\left[\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right]^{\frac{3}{100}}$
Se reinvierte instantáneamente.	*Dejar abierta la pregunta si los alumnos no la han contestado todavía.*	*Dejar abierta la pregunta si los alumnos no la han contestado todavía.*

5.3 Se proyectan las siguientes tablas y se les pide a los alumnos que las completen en el pizarrón blanco (donde se proyectó la tabla vacía) de acuerdo con la tabla 5.2.

Tiempo: 20 minutos.

Tabla 5.3.1 Suponiendo que inviertes un capital de C pesos en los bancos anteriores (supón ahora que el interés anual es del $r\%$) ¿cuánto dinero tendrás en cada banco en un año?

Tabla 5.3.1

Se reinvierte	Dinero (en pesos) acumulado en un año
Se reinvierte **cada año**.	
Se reinvierte **semestralmente**.	
Se reinvierte **mensualmente**.	$C\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1200}{r}}\right)^{\frac{1200}{r}}\right]^{\frac{r}{100}}$
Se reinvierte **quincenalmente**	
Se reinvierte **diariamente**.	$C\left[\left(1+\frac{1}{\frac{36000}{r}}\right)^{\frac{36000}{r}}\right]^{\frac{r}{100}}$
Se reinvierte **cada hora**.	
Se reinvierte **cada minuto**.	
Se reinvierte **cada segundo**.	
Se reinvierte **cada *n*-ésima fracción de año**.	$C\left[\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}}\right]^{\frac{r}{100}}$
Se reinvierte **instantáneamente**.	

Para el alumno

Tabla 5.3.2 Suponiendo que inviertes un capital de C pesos en los bancos anteriores (supón ahora que el interés anual es del $r\%$) ¿cuánto dinero tendrás en el periodo de tiempo indicado?

Tabla 5.3.2

	Dinero (en pesos) acumulado en k periodos de tiempo
Dinero acumulado en k **años**, si se reinvierte cada año.	
Dinero acumulado en k **semestres**, si se reinvierte semestralmente.	
Dinero acumulado en k **meses**, si se reinvierte mensualmente.	
Dinero acumulado en k **quincenas**, si se reinvierte quincenalmente.	
Dinero acumulado en k **días**, si se reinvierte diariamente.	
Dinero acumulado en k **horas**, si se reinvierte cada hora.	
Dinero acumulado en k **minutos**, si se reinvierte cada minuto.	
Dinero acumulado en k **segundos**, si se reinvierte cada segundo.	
Dinero acumulado en k **n-ésimas fracciones de año**, si se reinvierte cada n-*ésima* fracción de año.	

Para el alumno

El grupo y el profesor supervisarán lo escrito y se harán las correcciones pertinentes. Se proyectarán las tablas llenas en el pizarrón blanco.

20 minutos.

5.4 Pregunta: Si el periodo permitido para reinvertir es muy pequeño. ¿el dinero invertido se convertiría en una gran fortuna?
Si los alumnos no dan la respuesta, dejar abierta la pregunta.

Tiempo: 03 minutos.

5.5 Pregunta: ¿Si el dinero se reinvierte instantáneamente el inversionista llegará a ser inmensamente rico?
Si los alumnos no dan la respuesta, dejar abierta la pregunta.

Tiempo: 02 minutos.

Actividad 6: En esta actividad se analiza la información capturada en las tablas anteriores. Se hará un análisis gráfico.

Tiempo: 30 minutos.

Actividad 6	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
6.1	Interés Compuesto Sucesión	◊ Se hace notar, en la tabla 5.2 la expresión de la forma $\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}$	5
6.2	Sucesión	◊ Se gráfica con GeoGebra la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$	20
6.3	Respuesta a las preguntas 5.4 y 5.5	◊ Con base en el análisis 6.2	05

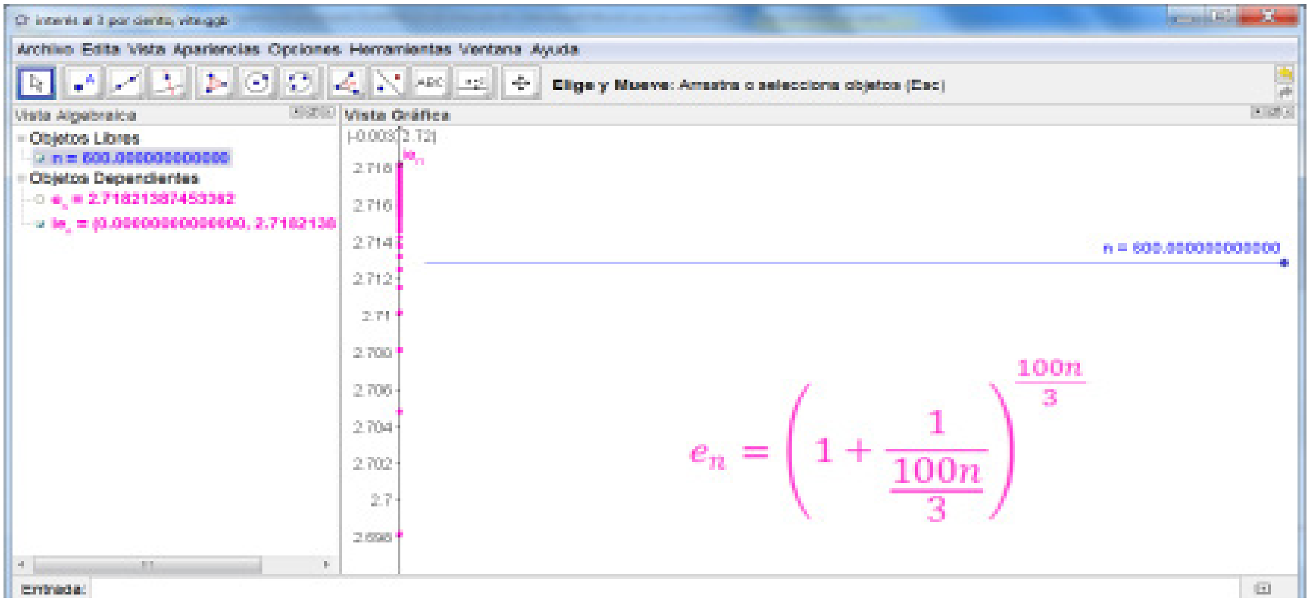
6.1 Es importante hacer la siguiente:

OBSERVACIÓN: En la expresión $\left[\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right]^{\frac{3}{100}}$ el exponente $\frac{3}{100}$ es constante, mientras que la base $\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}$ varía.

Tiempo: 5 minutos.

6.2 Para ver cómo se da esta variación se sugiere usar el software GeoGebra.

Para analizar los valores $\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}$, apoyándonos en un deslizador y la herramienta rastro, podemos ver la imagen de la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$



Se recomienda un acercamiento de pantalla, y también un deslizador amplio, (pues si es pequeño al deslizar n con el dedo, el punto e_n inmediatamente sube (está muy cerca del límite).

En esta imagen (y en el archivo) $ie_n = (0,e_n)$. El cambio de los valores numéricos e_n lo podemos ver en la vista algebraica usando la herramienta $y(ie_n)$.

Observamos en GeoGebra que los valores de la sucesión se aproximan a un número parecido a 2.71821387453362.

Es decir, podemos pensar que $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$ converge, y converge a un valor parecido al número 2.71821387453362.

Tiempo: 20 minutos.

6.3 Dar respuesta a las preguntas 5.4 y 5.5. Con base en el anterior resultado.

Tiempo: 05 minutos.

Actividad 7: Se continúa con análisis gráfico.

Tiempo: 25 minutos.

Actividad 7	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
7.1	Sucesión	◊ Se observarán las imágenes, tanto numérica como geométricamente, de sucesiones de la forma, $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}_n$ un r por cada cada equipo de cómputo.	10
		◊ Conjeturar, que para cualquier número positivo r, el valor del límite es el mismo.	10
		◊ Presentación del número e, como el límite de las sucesiones anteriores.	5

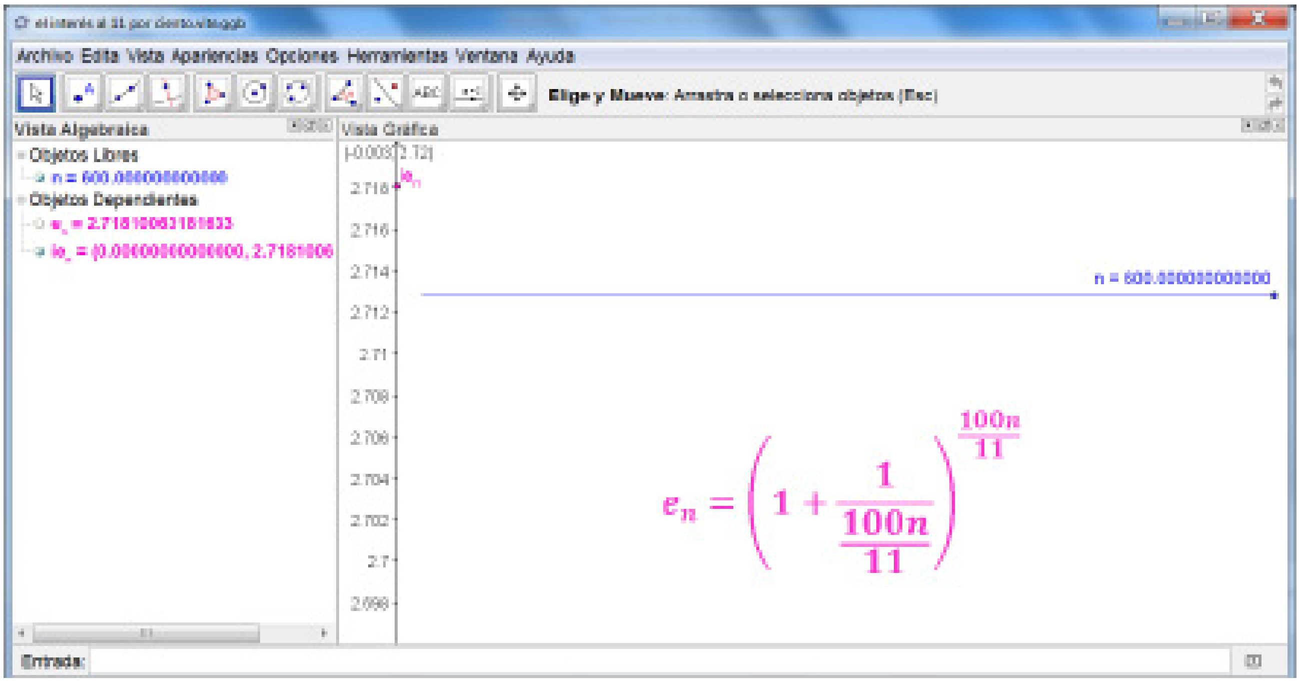
7.1 En la actividad anterior trabajamos con el caso particular en donde el interés era el 3%.

Se les pide a los alumnos que ahora cada uno de ellos analice con GeoGebra una sucesión

del tipo $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}_n$ pero con un interés distinto.

Por ejemplo, si el interés es del 11%, habrá que analizar la sucesión:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{11}}\right)^{\frac{100n}{11}}\right\}_n$$



Tiempo: 10 minutos.

Conjetura: Después de observar el comportamiento de las imágenes de todos los alumnos inferir que el ímite no depende el porcentaje elegido.

Es decir, si $r > 0$, todas las sucesiones $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}}\right\}_n$ convergen al mismo valor.

Tiempo: 10 minutos

A dicho valor lo representamos con la letra *e*. Es decir, si $r > 0$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}} = e, \qquad \text{Número de Euler.}$$

Tiempo: 5 minutos.

Actividad 8: En esta actividad se pretende presentar otras formas (otros límites) de expresar al número . ***e*****.**

Tiempo: 75 minutos.

Actividad 8	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
8.1	Sucesión	◊ Cuestionario en equipos de tres alumnos. ◊ Escritura en el pizarrón de las respuestas.	10 10
8.2	Función	◊ Graficar con GeoGebra la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	05
8.3	Función Sucesión	◊ Relación entre la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$	20
8.4	Función	◊ Cuestionario, trabajando en equipos de tres alumnos. ◊ Discusión.	10 10
8.5	Función	◊ Trazar la gráfica de f en el pizarrón.	10

8.1. Se forman equipos de tres alumnos y se les entrega el cuestionario siguiente.

Tiempo: 10 minutos.

Cuestionario 8.1

(8.1.a) ¿Qué forma tienen los valores

$$\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}, \quad \left(1+\frac{1}{\frac{100n}{11}}\right)^{\frac{100n}{11}}, \quad \left(1+\frac{1}{\frac{100n}{20}}\right)^{\frac{100n}{20}} \quad \text{y} \quad \left(1+\frac{1}{\frac{100n}{15}}\right)^{\frac{100n}{15}} \text{?}$$

Es decir, ¿hay una expresión algebraica que represente a todos estos valores?

(8.1.b) Completa la expresión $\lim_{n\to\infty} \frac{100n}{3} =$

(8.1.c) Si $r > 0$, completa la expresión $\lim_{n\to\infty} \frac{100n}{r} =$

(8.1.d) ¿Qué relación hay entre los siguientes límites?

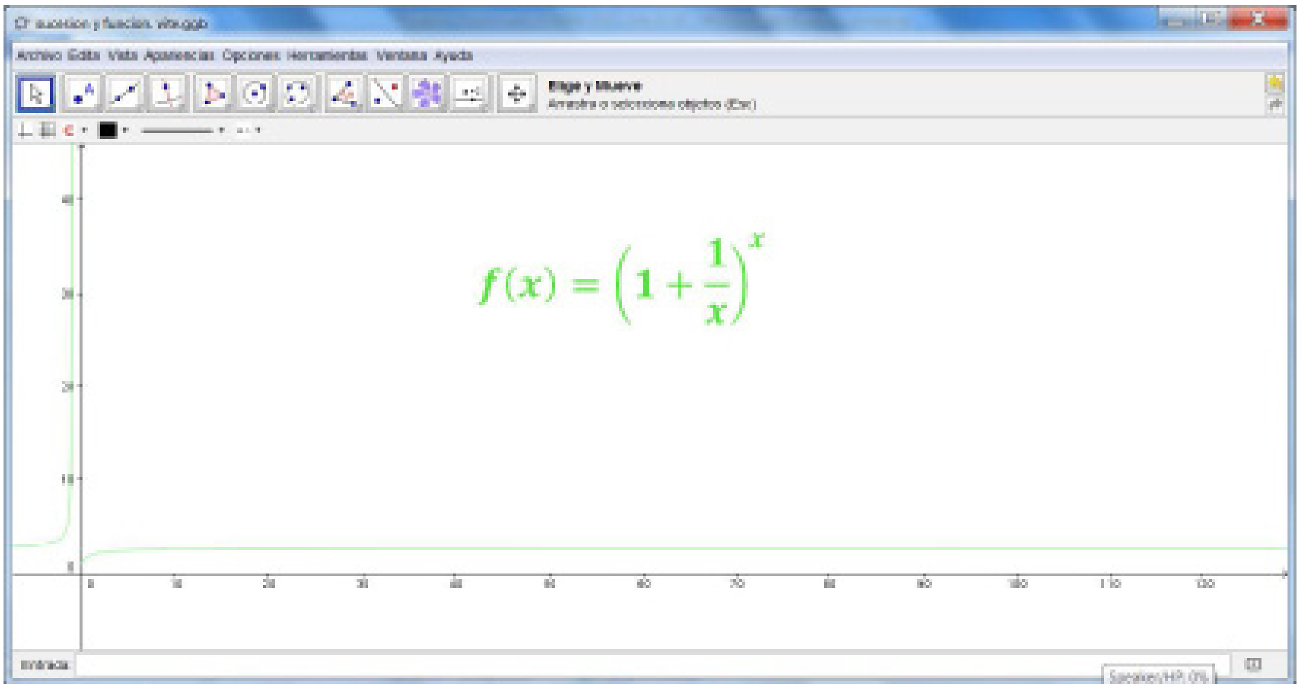
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{r}}\right)^{\frac{100n}{r}}$	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

Para el alumno

Después de entregar el cuestionario, los alumnos lo resolverán en el pizarrón.

10 minutos.

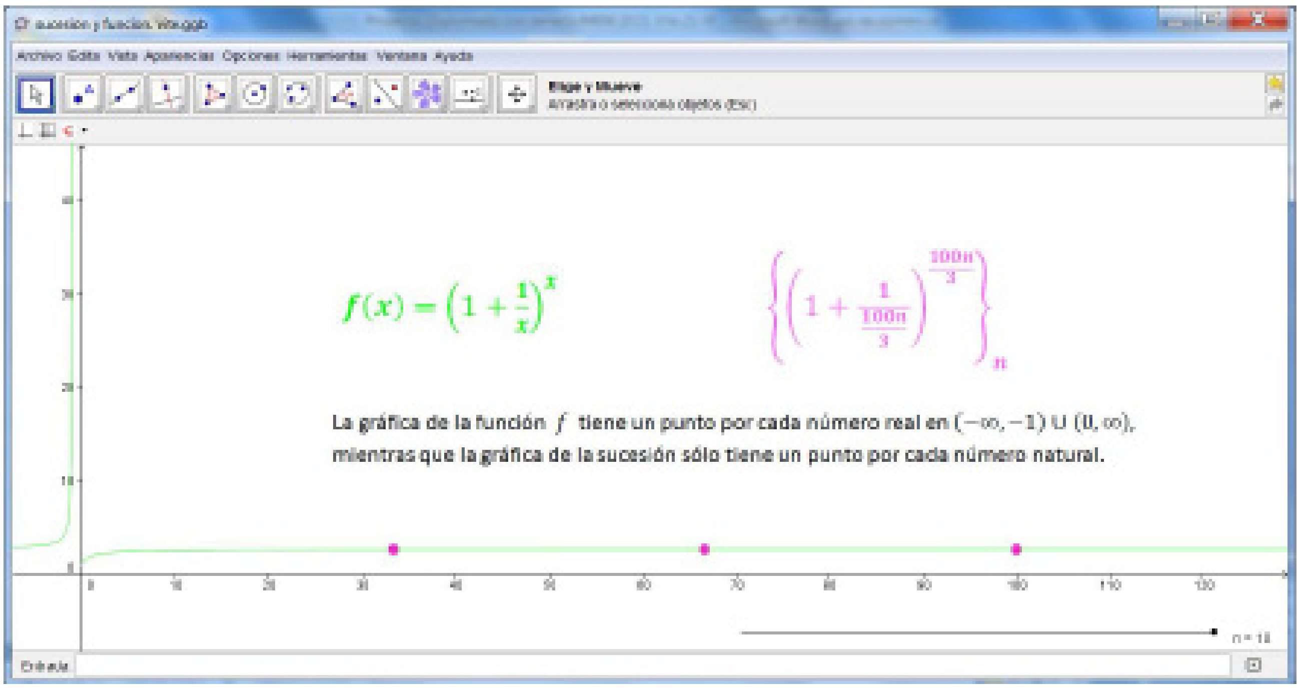
8.2 Pedir a los alumnos que con el software GeoGebra, tracen la gráfica de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.



Tiempo: 5 minutos.

8.3 Pedir a los alumnos que con el software GeoGebra, dibujen en el mismo plano las gráficas de:

La función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ y de la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$



Se recomienda crear un deslizador, para generar la gráfica de la sucesión.

Tiempo: 20 minutos.

8.4 Resolver, en equipos de tres alumnos, el siguiente cuestionario.

Tiempo: 10 minutos.

Cuestionario 8.4

(8.4.a) ¿Cuál es el dominio natural de f?

(8.4.b) ¿Qué relación hay entre f y $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{100n}{3}}\right)^{\frac{100n}{3}}\right\}_n$?

(8.4.c) ¿Qué relación hay entre f y $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_n$?

(8.4.d) Completa la expresión $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$

(8.4.e) Completa la expresión $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

Para el alumno

Después de la entrega del cuestionario se generará una lluvia de ideas en el grupo para revisar las respuestas del mismo.

Tiempo: 20 minutos.

8.5 EL profesor debe dibujar la gráfica de f en el pizarrón porque el software no refleja el comportamiento cerca del origen. Esto lo descubrirán después de que hayan reflexonado sobre cuál es el *dominio natural* de f.

Tiempo: 10 minutos.

Actividad 9: La finalidad de esta actividad es dar otra representación de e (como otro límite)

Tiempo: 45 minutos.

Actividad 9	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
9.1	Función	◊ Graficar con GeoGebra la función $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.	05
9.2	Función	◊ Preguntar a los alumnos cuál es el *máximo dominio de definición* para g. ◊ Dibujar la gráfica de g en el pizarrón.	10 20
9.3	Límite	◊ Discusión sobre la última pregunta del cuestionario anterior.	10

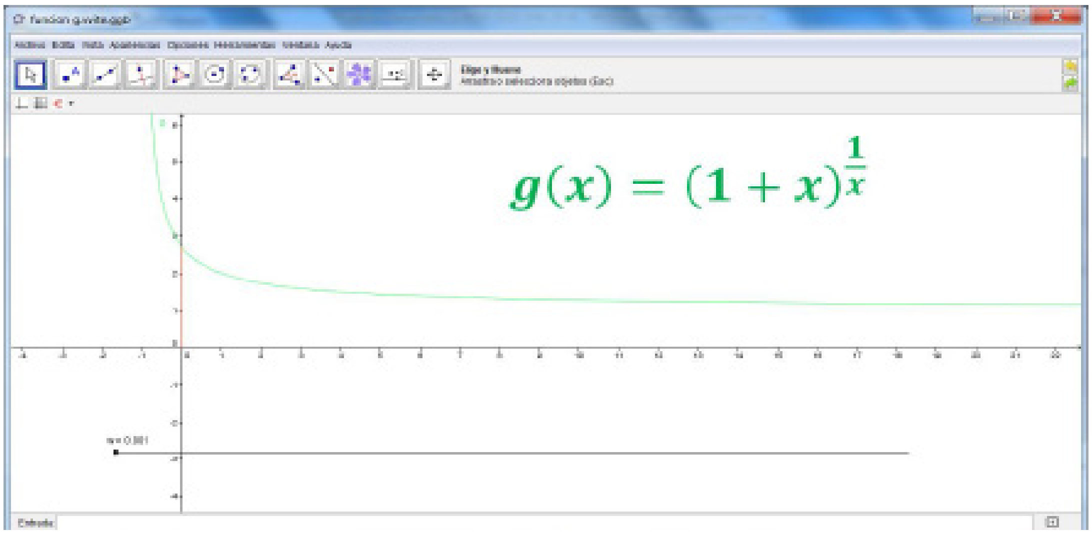
9.1 Pedir a los alumnos que con el software GeoGebra dibujen la gráfica de la función $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Tiempo: 05 minutos.

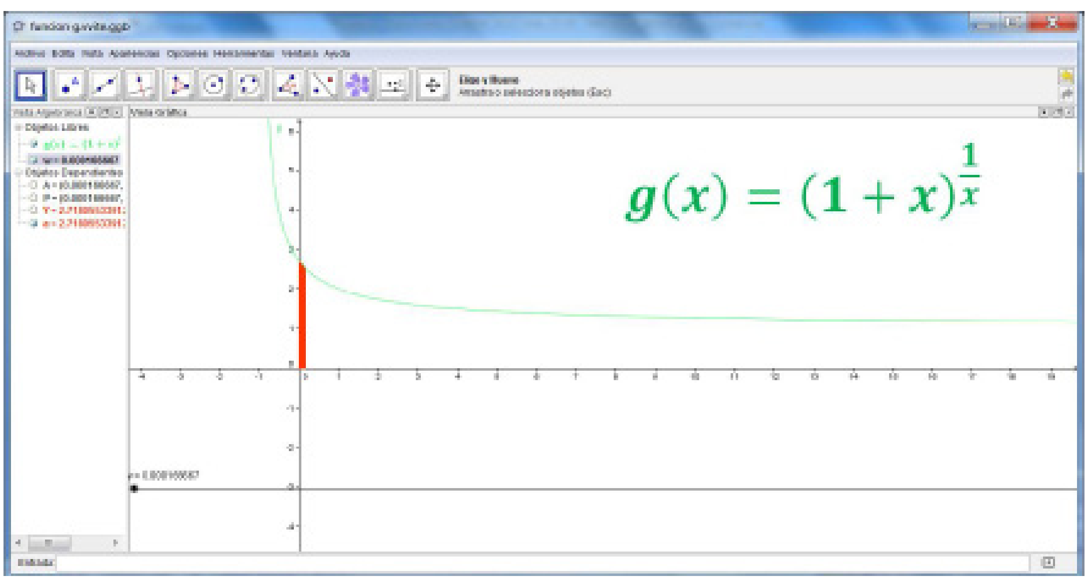
9.2 Generar una lluvia de ideas determinar el máximo dominio de definición para *g*.

Tiempo: 10 minutos

Dibujar la gráfica en el pizarrón porque el software no refleja el comportamiento de la función cerca del cero.



9.3 Ratificar o rectificar la respuesta dada a la pregunta 8.4.e.



La recomendación es crear un deslizador, muy ancho (mil unidades) en donde varíe la abscisa; como nos interesa el límite g de cuando x tiende a cero, conviene que x varíe entre un millonésimo y un medio.

Tiempo: 20 minutos.

Actividad 10: El propósito de esta actividad es expresar a *e* como una serie.

Tiempo: 50 minutos.

Actividad 10	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
10.1	Sucesiones Series	◊ ¿En verdad $e < 3$?	30
10.2	Sucesiones Series Progresiones geométricas	◊ Análisis numérico con GeoGebra de la serie: $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$	20

10.1 El profesor motivará esta sesión con la pregunta ¿$e < 3$? En las actividades 6.2, 7.1 y 9.3 GeoGebra nos permite conjeturar que la sucesión

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_n$$

converge a un número menor que 3. ¿Podría ocurrir que el software no fuese lo suficientemente preciso? ¿Podría la sucesión converger a 3.1?

El profesor presentará a los alumnos el siguiente argumento de que $e < 3$.

30 minutos.

Argumento de que $e < 3$:

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \, 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\frac{1}{n^i} =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\,\frac{1}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)!\,(n-i+1)(n-i+2)\,.\,.\,.(n-i+i-1)(n-i+i)}{(n-i)!\,n^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i+1)(n-i+2)\,.\,.\,.\,(n-1)\,n}{n^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n}\,\frac{n-i+2}{n}\,.\,.\,.\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n-(i-1)}{n}\,\frac{n-(i-2)}{n}\,.\,.\,.\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right)\,.\,.\,.\,\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!} \leq$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} =$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{1(2)3} + \frac{1}{1(2)3(4)} +.\,.\,.+ \frac{1}{1(2)3(4)\,...\,(n-1)} + \frac{1}{1(2)3(4)\,...\,(n-1)n} =$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{2(3)4} +.\,.\,.+ \frac{1}{2(3)4(5)\,.\,.\,.\,(n-1)} + \frac{1}{2(3)4(5)\,.\,.\,.\,(n-1)n} \leq$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2)} + \frac{1}{2(2)2} +.\,.\,.+ \frac{1}{2(2)2(2)\,.\,.\,.\,(2)} + \frac{1}{2(2)2(2)\,.\,.\,.\,(2)2} =$$

$$1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} +.\,.\,.+ \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

resumiendo tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \qquad .\quad .\quad .\quad (\alpha)$$

Analicemos la suma

$$S_n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$2S_n = 2 + 2 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow$$

Restando miembro a miembro tenemos:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$2S_n = 2 + 2 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$S_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 3$$

o bien

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) = 3$$

Y como

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \;, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right) = 3$$

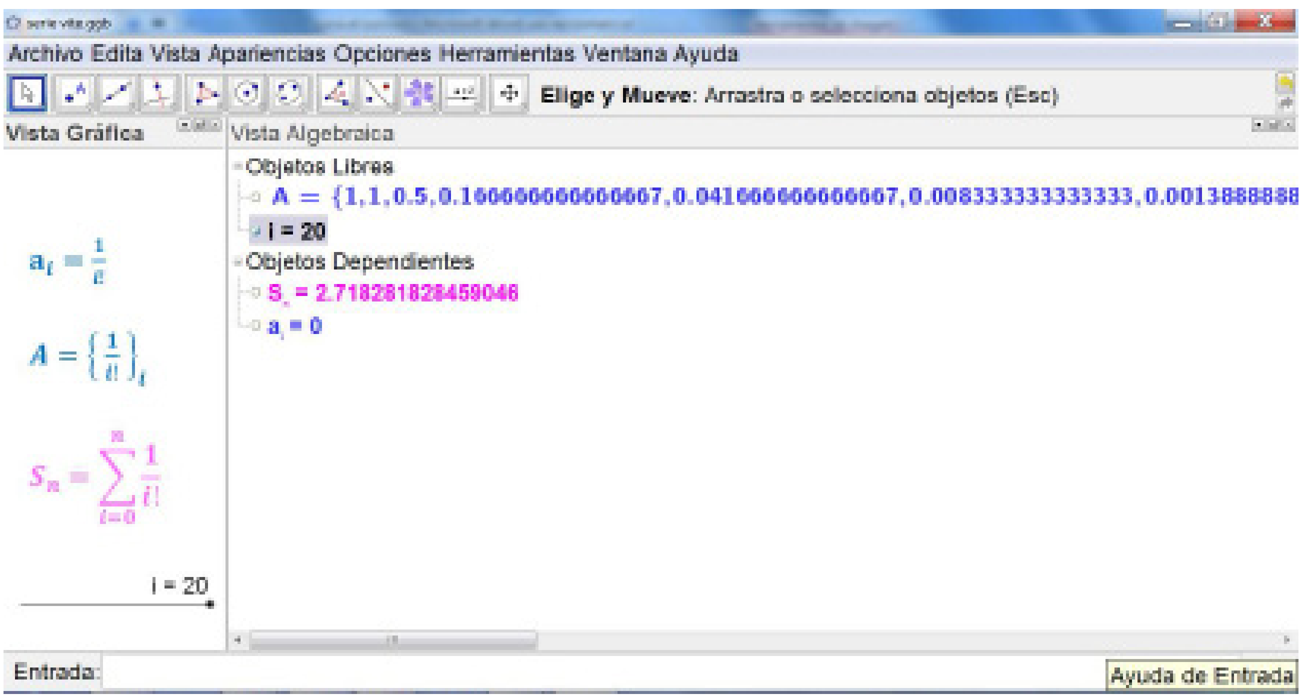
entonces $e \leq 3$.

10.2 La actividad anterior no fue meramente un afán desmedido de rigor para argumentar que $e < 3$, la actividad 10.1 nos dio pie para hablar de la serie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Podremos plantear a los alumnos que ya que esta serie apareció, valdría la pena echar un vistazo con GeoGebra para ver cómo se comporta.

Recomendación: Podemos usar GeoGebra para ver cómo varían las sumas parciales de esta serie. Podemos crear una lista de 20 elementos de la sucesión $\left\{\frac{1}{i!}\right\}_i$, crear un deslizador de naturales (i corriendo de 1 a 20), y con la herramienta (sumar lista, primeros n términos), podemos observar como varían las primeras sumas parciales de la serie.



Conjeturar que:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e \qquad es\ \ decir \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$$

Tiempo: 20 minutos

Actividad 11: Resumen

Tiempo: 10 minutos.

Actividad 11	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
11.1	Sucesión Función Límites Series	◊ Resumen	10

11.1 Presentar el siguiente resumen:

e el número de *Euler*		
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	ó	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$
	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	
	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	
	$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = e$	
	$e \sim 2.7182$	

Actividad 12: El objetivo de esta actividad es cerrar la secuencia, de tal manera que en forma relajada se comenten algunas aplicaciones en las que surja el número *e*, con lo cual se reafirme la importancia del número *e*, y se vislumbren nuevas áreas de estudio relacionadas con este número.

Tiempo: 540 minutos.

Actividad 12	Temas	Descripción	Tiempo estimado en minutos
12.1	Proponer un trabajo de investigación sobre una *aplicación del número e* (algún fenómeno natural, social o artístico en donde aparezca el número *e)* .	◊ Investigación.	120 minutos
12.2	Aplicación del número *e*	◊ Investigación. ◊ Reporte.	300 minutos
12.3	Aplicación del número *e*	◊ Exposición de reporte.	120 minutos

12.1 El profesor con una semana de anticipación organizará equipos de cuatro o cinco alumnos (máximo 15 equipos).

Y les pedirá que investiguen y propongan como proyecto de investigación fuera del aula, dos sucesos que hagan referencia al número *e*, esto es, dos fenómenos naturales, sociales o artísticos en los cuales surja el número *e*. El reporte se entregará el día siguiente, por escrito en línea, el cual contendrá básicamente dos renglones.

El profesor seleccionará un máximo de temas como equipos haya.

En la clase siguiente el profesor asignará un tema por equipo evitando, que haya temas repetidos. Cada equipo tendría como tema uno de los que propuso originalmente, a menos que sus temas los hayan propuesto varios equipos, en ese caso la asignación se hará según el criterio del profesor.

El profesor informará que en una semana los equipos deberán entregar un reporte, en el cual se plantee una breve descripción del tema asignado. El reporte, en sí, se hará en un mínimo media cuartilla y máximo de una, adicionalmente deberá: incluir fuentes; será enviado a cada uno de los alumnos del curso, y se deberá exponer ante el grupo, en un máximo de cinco minutos.

Tiempo: 120 minutos.

12.2 Los alumnos tendrán una semana para investigar y elaborar su reporte.

Tiempo: 300 minutos

12.3 Los equipos expondrán a manera de charla de divulgación su investigación. Para cerrar la secuencia, el profesor hará incapié en la importancia del número *e*. Y señalará posibles líneas de estudio de éste, diferentes a las estudiadas en esta secuencia. El Profesor dedicará un espacio para hablar de las contribuciones de Euler y Napier en relación al número *e*.

Tiempo: 120 minutos

RECOMENDACIONES Y NOTAS PARA EL PROFESOR

Redacción. Es importante que el profesor escriba las soluciones para guiar los ejercicios posteriores. Debemos tener presente que **la finalidad de la secuencia es presentar al número** *e*, **no es resolver problemas de interés compuesto**. Los problemas de interés simple y compuesto fueron un detonador. Quiero hacer especial referencia al segundo cuestionario, los alumnos de sexto año son capaces de contestar las primeras cuatro preguntas, de éste, de una manera sencilla usando decimales y no fracciones, sin embargo, dicha escritura no facilita el descubrimiento de patrones que nos conduzcan a la generalización, la cual es fundamental para el logro de nuestro objetivo. El lenguaje es una herramienta importante para la construcción del conocimiento.

Alumnos. En el programa de matemáticas V, de la ENP, se estudian funciones exponenciales, a pesar de ello, no recomiendo que esta secuencia se presente en tal curso porque involucra temas como límites y sucesiones, temas que no se estudian en dicho curso.

En el programa de matemáticas VI (área2), se estudian funciones, límites y sucesiones. No obstante, no recomiendo presentarlo a los alumnos del área 2 (químico-biológicas). El profesor podría elegir algunas actividades al trabajar en la Unidad 1 *Conceptos esenciales de las funciones* o bien para la Unidad 2 *Límites de una función para analizar su comportamiento.*

En el caso de alumnos de sexto de área 3 (económico administrativas), el profesor podría seleccionar algunas actividades que se ajusten al programa, por ejemplo, en la unidad I, *Introducción a modelos socioeconómicos a través de progresiones y series*.

Considero que el estudiante idóneo a quien estaría dirigida esta secuencia es aquel que cursa simultáneamente los cursos de Matemáticas VI, área 1 (fisico-matemáticas) y Temas Selectos de Matemáticas, y desde luego en un momento en el cual ya haya estudiado los temas de *Combinatoria, Inducción, Fórmula del Binomio de Newton con exponentes naturales, Funciones y Límites, Sucesiones y Series.*

Una alternativa para alumnos del área 1 que cursan Cálculo, pero no Temas Selectos de Matemáticas podría ser: llevar a cabo la secuencia, sin las actividades en las que se desarrolla el Binomio, concretamente eliminar las actividades 1, 2, 3 y 10. Es decir la secuencia empezaría en la actividad 4 y constaría de siete actividades.

Esta secuencia también podría presentarse a alumnos que cursan los primeros semestres en alguna de las carreras de las áreas fisico-matemáticas.

Tiempo. Con respecto a los tiempos estimados en las actividades, el profesor debe tener presente que el punto central de la secuencia es el alumno, es éste quien realmente marcará los tiempos, aunque desde luego sabemos que estamos sujetos a tiempos escolares (procuraremos estirar la cuerda que nos sujeta a éstos). Y en caso extremo suprimir actividades. Considero que las actividades 3, 4, 5, 6, 7, y 8 son las principales con respecto al propósito de la secuencia, así que en caso extremo la secuencia podría limitarse a éstas.

Una alternativa para resolver los problemas de tiempo, es presentar la secuencia en un taller, extracurricular.

Por otra parte, si el profesor considera que el proceso presentado en la actividad 3 (los cuestionarios con diferente periodo para reinversión) es muy largo, puede presentar un desarrollo más corto en función del tiempo disponible y de los alumnos con los que esté trabajando. Por ejemplo, *reinversión anual, semestral, mensual, quincenal*, y a partir de éstas inferir y registrar en la tabla *reinversión diaria, por hora, por minuto, por segundo, por n-ésima fracción de año*.

III. SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN

Trabajo en el aula 60%.

Los aspectos a considerar son: *Actitud, orden, limpieza* física, *limpieza estructural, precisión* y *completitud.*

Se le debe dar a conocer antes de iniciar la secuencia que ésta equivaldrá a un examen parcial.

Cada sesión el alumno debe armar un expediente con hojas foliadas, en las hojas foliadas estarán los procedimientos realizados para dar respuesta a cada pregunta. El folio es el número de pregunta, y número de hoja para dicha pregunta. Ejemplo: ***pregunta (2.1) hoja 1 de 2.*** Los alumnos con su celular o tableta fotografiaran los cuestionarios y hojas de trabajo, de tal manera que, después de entregarlos físicamente, ellos tengan acceso a las preguntas y puedan completar sus hojas de trabajo en casa (enunciados). Los desarrollos aritméticos algebraicos y respuestas dadas por el alumno deberán ser manuscritos.

Por cada actividad crearán una carpeta electrónica con los expedientes de cada sesión, así como los archivos hechos en GeoGebra. En un maletín electrónico guardarán las once carpetas.

El maletín electrónico se entregará al finalizar la secuencia.

El profesor paralelamente creará el maletín físico.

El profesor debe tomar en cuenta el trabajo realizado por el alumno:

- **Actitud**: Disposición para trabajar y colaborar.
- **Orden:** Orden en que presenta su trabajo.
- **Limpieza** física**:** El profesor debe tener amplio criterio, por ejemplo, considerar diametralmente opuestos: "varios tachones" y "una mancha de dulce". Recordemos que es trabajo en el aula y el alumno está haciendo y refutando conjeturas.
- **Limpieza estructural:** Un trabajo limpio estructuralmente es aquel que tiene orden y coherencia.
- **Precisión:** En determinados cuestionarios el profesor debe revisar la precisión de las respuestas, por ejemplo, en (4.3.1), o en ejercicios clásicos como: "Determinar el sexto término en el desarrollo del $(1 + b)^{24}$", (2.1.a) pero no en (2.1.f).
- **Completitud:** Cada trabajo no entregado se evaluará con cero puntos en los rubros anteriores. Cada inasistencia redundará en cero puntos en las actividades del correspondiente día.

Participación 10%.

Debe registrarse cada participación del alumno tanto la verbal como la escrita en el pizarrón. El profesor debe procurar la partición de todos los alumnos que deseen participar. Y también promover la participación de aquellos que no quieran participar.

Participación destacada 10%.

La participación sobresaliente debe registrarse por separado y considerase como puntuación extra.

Cuestionarios a casa 24%,

En este caso deben tomarse en cuenta *orden*, *limpieza física*, *limpieza estructural* y *precisión*.

Maletín electrónico 6%

El objetivo del maletín es que el alumno integre su trabajo y pueda recurrir a éste cuando lo necesite. Pero el trabajo será esencialmente el realizado en clase.

IV. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

- Cárdenas, H., Lluis, E., Raggi, F. & Tomás F. (1973). *Álgebra Superior.* México: TRILLAS.
- Carrillo, A., Hernández, C., Lam, E. & de Oteyza, E. (1998). *Temas Selectos de Matemáticas.* México: PRENTICE HALL.
- Lancelot, H. Mathematics for the Million. (1950). New York: N.Y. W. W. NORTON & COMPANY, INC.
- Maor, E. *e: The Story of a Number.* (1994). New Yersey: PRINCENTON UNIVERSITY PRESS.

APÉNDICE

Este apartado, está dirigido al profesor, no a los alumnos de bachillerato. Y aquí se demuestra que dos de las expresiones más famosas para *e*, son iguales, concretamente se mostrará que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

Lema 1.

$\forall\, n, m \epsilon \mathbb{N}, \quad si\ \ n > m\ \ entonces$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right)\ .\ .\ .\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!}$$

Demostración

Sean $m, n \epsilon \mathbb{N}. \quad n > m.$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}C_i^n\,1^{n-i}\left(\frac{1}{n}\right)^i=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\frac{1}{n^i}>$$

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}\frac{1}{n^i}=\sum_{i=0}^{m}\frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\frac{1}{i!}=1+\sum_{i=1}^{m}\frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\frac{1}{i!}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i)!\,(n-i+1)(n-i+2)\ .\ .\ .\ (n-i+i-1)(n-i+i)}{(n-i)!\,n^i}\frac{1}{i!}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{m}\frac{(n-i+1)(n-i+2)\,.\,.\,.\,(n-i+i-1)(n-i+i)}{n^i}\frac{1}{i!}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{m}\frac{n-i+1}{n}\,\frac{n-i+2}{n}\ .\ .\ .\ \frac{n-i+i-1}{n}\,\frac{n-i+i}{n}\,\frac{1}{i!}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{m}\frac{n-(i-1)}{n}\,\frac{n-(i-2)}{n}\ .\ .\ .\ \frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n}\,\frac{1}{i!}=$$

$$1+\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right)\ .\ .\ .\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!}$$

Concluimos que: $\forall\, m, n \epsilon \mathbb{N},\ si\ \ m < n\ \ entonces$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1+\sum_{i=1}^{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right)\ .\ .\ .\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!}$$

Lema 2. $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ *es creciente.*

Demostración:

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$.

Por lema 1 tenemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right) \ . \ . \ . \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!} \quad =>$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right) \ . \ . \ . \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{i!} >$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \left(1-\frac{i-1}{m}\right)\left(1-\frac{i-2}{m}\right) \ . \ . \ . \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{m-(i-1)}{m}\,\frac{m-(i-2)}{m} \ . \ . \ . \ \frac{m-1}{m}\,\frac{m}{m}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{m-i+1}{m}\,\frac{m-i+2}{m} \ . \ . \ . \ \frac{m-i+i-1}{m}\,\frac{m-i+i}{m}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{(m-i+1)(m-i+2)\ .\ .\ .(m-i+i-1)(m-i+i)}{m^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{(m-i)!\,(m-i+1)(m-i+2)\ .\ .\ .(m-i+i-1)(m-i+i)}{(m-i)!\,m^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{(m-i+i)!}{(m-i)!\,m^i}\,\frac{1}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{m!}{(m-i)!\,m^i}\,\frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!\,m^i}\,\frac{1}{i!} =$$

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!\,i!}\,\frac{1}{m^i} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i\, 1^{m-i}\left(\frac{1}{m}\right)^i = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

Por tanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ o bien $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Por tanto $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ es creciente.

Lema 3.

$$\left\{1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i}\right\}_n \qquad es \;\; creciente.$$

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$

Puesto que $\frac{1}{2^n} > 0$,

$$1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} \; < \; 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^n} = 1+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}$$

por tanto

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} \; \leq \; 1+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}$$

Lema 4.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} < 3$$

Demostración:

En la actividad 10 se mostró que

$$1+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Y desde luego $3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$, por tanto se cumple lo deseado.

Lema 5. $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ *está acotada superiormente por 3.*

Demostración:

En la actividad 10 se mostró que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq 1+\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

y por el lema anterior

$$1+\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} \leq 3$$

Por tanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

Teorema 1. $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ *es convergente.*

Demostración.

Por los lemas 2 y 5, $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ es creciente y acotada superiormente respectivamente, luego $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}_n$ es convergente.

Notación: Como el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe, es decir es un número real, lo denotaremos por e. Es decir:

$$e =: \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{o bien} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Lema 6.

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right\}_n \quad \textit{es creciente.}$$

Demostración.

Para todo natural i, $\frac{1}{i!} > 0$, así que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}$$

por tanto

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} < \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}$$

Lema 7.

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right\}_n \quad \textit{está acotada superiormente.}$$

Demostración.

En la actividad 10 se mostró que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

y en el lema 4, se mostró que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 1 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leq 3$$

Por tanto

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq 3$$

Teorema 2.

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right\}_n \quad es\ convergente.$$

Demostración:

El lema 6 nos dice que esta sucesión es creciente y el lema anterior que está acotada superiormente, concluimos entonces que es convergente. Llamemos E al límite de esta sucesión. Es decir:

$$E =: \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \qquad \text{o bien} \qquad E =: \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Lema 8. $e \leq E$.

Demostración

En la actividad 10 se mostró que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}$$

Y ya vimos que las correspondientes sucesiones convergen, por monotonía concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

es decir, $e \leq E$.

Lema 9. $E \leq e$.

Demostración

Sea $m \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}, \quad n > m$.

Por el lema 1 sabemos que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right) \ . \ . \ . \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{1}{i!}$$

Además

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \sum_{i=1}^{m} \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\left(1-\frac{i-2}{n}\right) \ . \ . \ . \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{1}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$$

Por tanto

$$e \geq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$$

Como m era un natural elegido arbitrariamente en $\mathbb{N}$, concluimos que:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \qquad e \geq \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}$$

Y como

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} = E$$

entonces $e \geq E$.

Teorema 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

Demostración:

De los lemas 8 y 9 se sigue que $e = E$, esto es:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

Corolario.

$$e = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}!}$$